P 9

Fluides en écoulement stationnaire

9.1 Compétences du chapitre

Notions et contenus	Capacités exigibles
Grandeurs eulériennes. Régime stationnaire.	• Décrire localement les propriétés thermodynamiques et mécaniques d'un fluide à l'aide des grandeurs intensives pertinentes.
Lignes et tubes de courant.	• Déduire le caractère divergent ou rotationnel d'un écoulement à l'aide d'une carte de champ de vitesse fournie.
Débit massique.	• Exprimer le débit massique en fonction de la vitesse d'écoulement. • Exploiter la conservation du débit massique.
Débit volumique.	• Justifier l'intérêt d'utiliser le débit volumique pour l'étude d'un fluide incompressible en écoulement.

9.2 Différentes échelles

— Rappel —

En mécanique des fluides, on sera amené à étudier des systèmes macroscopiques, c'est-à-dire constitué d'un grand nombre de molécules ou d'atomes.

Comme déjà vu page 136, trois échelles de description sont possibles :

En effet, parler de molécules et d'atomes consiste à décrire la matière à l'*échelle microscopique*. C'est une modélisation discrète de la matière (par opposition à modélisation continue), à l'échelle du nm. Or, l'étude d'un fluide ne peut pas consister à déterminer le mouvement de chacune de ses molécules. Non seulement ce serait impossible techniquement, mais on ne saurait que faire de toute cette information. C'est pourquoi en mécanique des fluides, on ne va s'intéresser qu'aux propriétés macroscopiques des systèmes étudiés. L'échelle de description que l'on va adopter est donc l'*échelle macroscopique*. À cette échelle, on va adopter une modélisation continue de la répartition de matière, comme si la matière n'était pas constituée d'atomes, mais emplissait tout l'espace.

Souvent, les grandeurs définies localement (vitesse du fluide, masse volumique) n'ont pas nécessairement la même valeur partout dans le fluide.

Ces grandeurs sont définies à l'*échelle mésoscopique*.

L'échelle mésoscopique, de l'ordre de la dizaine de μm, est assez grande devant l'échelle microscopique pour adopter une modélisation continue de la matière et assez petite devant l'échelle macroscopique pour considérer ces grandeurs comme localement uniformes.

On considère, autour d'un point M, un petit volume $dV_{(M)}$ qui contient donc un grand nombre de molécules.

Ne pas confondre molécule et particule de fluide : une particule de fluide contient un grand nombre de molécules.

9.3 Descriptions lagrangienne et eulérienne

9.3.1 Description lagrangienne

— Description lagrangienne —

— Exemples —

- On photographie en pause longue un objet en mouvement, par exemple les phares d'une voiture la nuit.
- Un observateur suit des yeux une feuille à la surface de l'eau s'écoulant dans le lit d'une rivière.

— Trajectoire en description lagrangienne —

9.3.2 Description eulérienne

— Description eulérienne —

— Exemples —

- Un observateur regarde fixement une zone de la rivière et voit passer des objets à la surface de l'eau quand ils traversent son champ de vision.
- Un observateur observe les véhicules qui passent à la barrière d'un péage.
- On photographie à un instant t un objet en mouvement. Typiquement, une carte des vents est une description eulérienne :

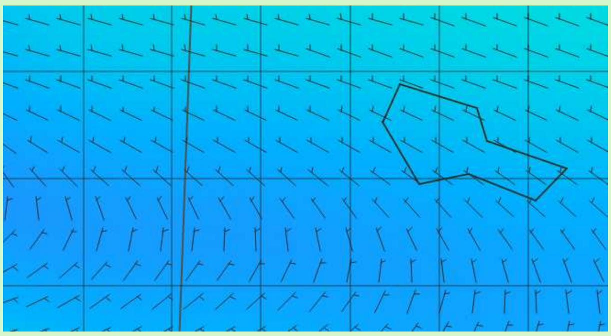


FIGURE 9.1 – Fichier grib

— Ligne de courant en description eulérienne —

— Tube de courant —

9.3.3 Compatibilité entre les deux descriptions

En description lagrangienne, le vecteur vitesse d'un point M du fluide représente le vecteur vitesse de la particule de fluide qui l'entoure alors qu'en description eulérienne, c'est le vecteur vitesse de la particule située en M à un instant t.
La trajectoire retrace l'histoire d'une particule de fluide alors que la ligne de courant représente un instantané du champ des vitesses.

— Cas particulier —

Comme ce sera vu plus tard, un écoulement stationnaire est tel que les champs définis dans le fluide sont indépendants du temps, en particulier celui des vitesses.

Dans un tel écoulement, le champ des vitesses eulérien ne dépend pas explicitement du temps et dans ce cas, lignes de courant et trajectoires coïncident. En effet, dans le cas d'un écoulement stationnaire, une particule suit nécessairement la ligne d'écoulement sur laquelle elle se trouve puisque celle-ci est fixe.

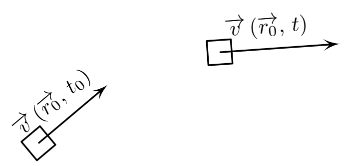
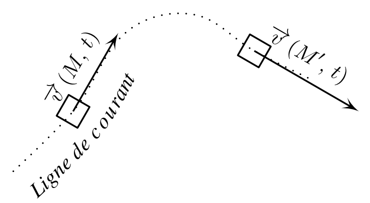
Approche	lagrangienne	eulérienne
		
Variables	$\vec{r_0}$ (position initiale) et t	M et t
L'observateur	suit la particule	fixe le point M
Idéal pour	la mécanique du point	l'étude des écoulements.

TABLE 9.2 – Approches lagrangienne et eulérienne

9.4 Grandeurs eulériennes

9.4.1 Masse volumique

La masse volumique d'une particule de taille mésoscopique $dV_{(M)}$ est :

Les unités :
La masse dm s'exprime en kg, le volume $dV_{(M)}$ en m^3 et la masse volumique ρ en $kg.m^{-3}$

— Fluide incompressible —

En première approximation, on pourra considérer comme incompressibles :

- les liquides,
- les gaz, lorsque leur vitesse d'écoulement est suffisamment faible, c'est-à-dire lorsque leur vitesse v est très inférieure à la vitesse du son : $v \ll v_{\text{son}}$.

9.4.2 Débits volumique et massique

— Débit volumique —

On appelle débit volumique D_V à travers une surface $\overrightarrow{S}$ orientée, le volume δV de fluide qui traverse cette surface (S) par unité de temps. Le débit volumique est donc une grandeur algébrique, positive si la vitesse $\overrightarrow{v}$ du fluide est de même sens que $\overrightarrow{S}$, et négative dans le cas contraire.

$$\boxed{D_V = \iint_{(S)} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \frac{\delta V}{dt}}$$

Les unités :
Le débit volumique D_V s'exprime en $m^3.s^{-1}$

— Débit massique —

On appelle débit massique D_m à travers une surface $\overrightarrow{S}$ orientée, la masse δm de fluide qui traverse cette surface (S) par unité de temps. Le débit massique est donc une grandeur algébrique, positive si la vitesse $\overrightarrow{v}$ du fluide est de même sens que $\overrightarrow{S}$ et négative dans le cas contraire.

$$\boxed{D_m = \iint_{(S)} \rho \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \frac{\delta m}{dt}}$$

Les unités :
Le débit massique D_m s'exprime en $kg.s^{-1}$

9.4.3 Densité de courant

— Vecteur densité de courant —

Les unités :
La densité de courant de masse j_m s'exprime en $kg.m^{-2}.s^{-1}$.

Le flux du vecteur densité de courant massique à travers une surface est égal au débit massique :

9.5 Bilan massique

9.5.1 Démonstration simplifiée

Considérons un fluide réel, incompressible, en écoulement stationnaire dans un système de conduites.

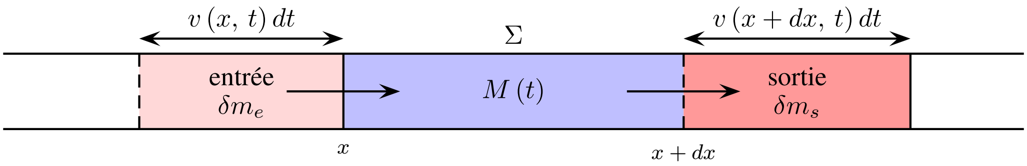


FIGURE 9.2 – Bilan massique à 1 dimension

À l'instant t, le système est composé du **système fermé** $\{\text{entrée} + \Sigma\}$ de masse $\delta m_e + M(t)$ et à l'instant $t + dt$, il est composé du **système fermé** $\{\text{sortie} + \Sigma\}$ de masse $\delta m_s + M(t+dt)$.

En notant $\mathcal{S}$ la section de la conduite, la masse $m(t)$ de la particule de fluide à l'instant t vaut :

$$\begin{aligned} m(t) &= M(t) &&+ \quad \delta m_e \\ &= \rho(x,\, t)\, \mathcal{S}\, dx &&+ \quad \rho(x,\, t)\, \mathcal{S}\, v(x,\, t)\, dt \end{aligned}$$

La masse $m(t+dt)$ de la particule de fluide à l'instant $t + dt$ vaut :

$$\begin{aligned} m(t+dt) &= M(t+dt) &&+ \quad \delta m_s \\ &= \rho(x+dx,\, t)\, \mathcal{S}\, dx &&+ \quad \rho(x+dx,\, t)\, \mathcal{S}\, v(x+dx,\, t)\, dt \end{aligned}$$

La conservation de la masse de la particule de fluide s'écrit :

$$\begin{aligned} m(t+dt) &= m(t) \\ M(t+dt) + \delta m_s &= M(t) + \delta m_e \\ M(t+dt) - M(t) &= \delta m_e - \delta m_s \\ dM(t) &= \delta m_e - \delta m_s \\ \frac{\partial M(t)}{\partial t}\, dt &= +\rho(x,\, t)\, \mathcal{S}\, v(x,\, t)\, dt - \rho(x+dx,\, t)\, \mathcal{S}\, v(x+dx,\, t)\, dt \\ \frac{\partial \rho(t)}{\partial t}\, \mathcal{S}\, dx\, dt &= -\left[\rho(x+dx,\, t)\, v(x+dx,\, t) - \rho(x,\, t)\, v(x,\, t)\right] \mathcal{S}\, dt \\ \frac{\partial \rho(t)}{\partial t}\, dx &= -\left[\rho(x+dx,\, t)\, v(x+dx,\, t) - \rho(x,\, t)\, v(x,\, t)\right] \\ \frac{\partial \rho(t)}{\partial t}\, dx &= -\frac{\partial(\rho\, v)}{\partial x}\, dx \end{aligned}$$

Soit, avec $j_{m,x} = \rho\, v$:

$$\boxed{\frac{\partial j_{m,x}}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

En généralisant dans les 3 directions de l'espace, on obtient :

9.5.2 Démonstration complète

Soit un volume V_0 fixe dans l'espace entouré par une surface Σ fermée.

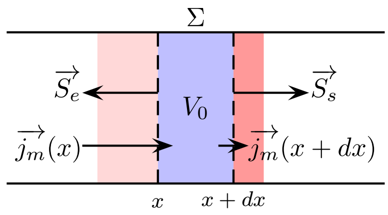


FIGURE 9.3 – Bilan massique

La variation, par unité de temps, de masse $M(t)$ de fluide contenu dans le volume V_0 est égale à la différence par unité de temps entre la masse entrante et la masse sortante :

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} = \frac{\delta m_e}{dt} - \frac{\delta m_s}{dt} = D_{m,e} - D_{m,s}$$

Or, les vecteurs $\overrightarrow{S_e}$ et $\overrightarrow{j_m}(x)$ étant opposés, on a :

$$D_{m,e} = -\iint_{(S_e)} \overrightarrow{j_m}(x) \cdot \overrightarrow{d^2S}$$

De même, les vecteurs $\overrightarrow{S_s}$ et $\overrightarrow{j_m}(x+dx)$ étant opposés et :

$$D_{m,s} = \iint_{(S_s)} \overrightarrow{j_m}(x+dx) \cdot \overrightarrow{d^2S}$$

On en déduit donc, en considérant le flux **sortant**
$\oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{j_m} \cdot \overrightarrow{d^2S} = \iint_{(S_e)} \overrightarrow{j_m}(x) \cdot \overrightarrow{d^2S} + \iint_{(S_s)} \overrightarrow{j_m}(x+dx) \cdot \overrightarrow{d^2S}$, que :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_{(V_0)} \rho \, d^3V\right) = -\oiint_{(\Sigma)} \overrightarrow{j_m} \cdot \overrightarrow{d^2S}$$

Soit, en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_{(V_0)} \rho \, d^3V\right) = -\iiint_{(V_0)} div \, \overrightarrow{j_m} \, d^3V$$

Soit :

$$\iiint_{(V_0)} \left(div \, \overrightarrow{j_m} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) d^3V = 0$$

Ceci étant vrai quelque soit le volume V_0, cela conduit à l'équation de conservation de la masse :

$$\boxed{div \, \overrightarrow{j_m} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

9.6 Écoulement stationnaire

— Écoulement stationnaire —

Un écoulement est stationnaire (ou permanent) si en un point donné, son champ des vitesses ainsi que sa masse volumique ne varient pas :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \text{ et } \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

En régime stationnaire, la trajectoire des particules et les lignes de courant sont confondues (mais ce n'est pas le cas en général).

De l'équation de conservation de la masse, on déduit que $\boxed{div\,\vec{j_m} = 0}$. Avec :

$$\iiint_{(V_0)} div\,\vec{j_m}\,d^3V = \oiint_{\Sigma} \vec{j_m} \cdot \overrightarrow{d^2S}$$

On obtient $\boxed{\oiint_{(\Sigma)} \vec{j_m} \cdot \overrightarrow{d^2S} = 0}$. Cela signifie que le vecteur $\vec{j_m}$ est à flux conservatif : le débit massique est identique à travers tout tube de courant.

Le débit massique étant constant, on peut écrire, pour deux sections S_1 et S_2 d'une conduite :

$$\boxed{\rho_1\,S_1\,v_1 = \rho_2\,S_2\,v_2}$$

ou encore :

$$\rho\,S\,v = C^{te}$$

En différenciant, on obtient :

$$d\rho\,S\,v + \rho\,dS\,v + \rho\,S\,dv = 0$$

et en divisant par $\rho S v$:

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} = 0}$$

⇒ **Activité 9.1**

Retrouver l'expression ci-dessus en utilisant les dérivées logarithmiques :

9.7 Écoulement stationnaire incompressible

Si l'écoulement est stationnaire et incompressible, les relations $div\,\overrightarrow{j_m} = 0$ et $\rho = C^{te}$ entraînent $div\,\overrightarrow{v} = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est à flux conservatif et le débit volumique est alors le même à travers tout tube de courant (de même que le débit massique évidemment).

Pour un tube de courant, on a, pour 2 sections du tube :

$$\iint_{(S_1)} \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{d^2S_1} = \iint_{(S_2)} \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{d^2S_2}$$

Soit :

$$D_{V_1} = D_{V_2}$$

On a alors, en définissant la vitesse moyenne par $\overline{v} = \dfrac{D_V}{S}$:

$$\overline{v_1}\,S_1 = \overline{v_2}\,S_2$$

Le resserrement des lignes de courant provoque une augmentation de la vitesse moyenne.

— Rappel —

Comme déjà signalé page 174 pour un gaz, la frontière "compressible - incompressible" est liée à la vitesse de l'écoulement :

- si le gaz possède une vitesse inférieure à $0{,}3\ v_{\text{son}}$, le gaz peut être considéré comme incompressible,
- sinon, il est considéré comme compressible.

9.8 Écoulement irrotationnel

— Écoulement irrotationnel —

Un écoulement irrotationnel est un écoulement dans lequel il n'y a pas d'effets tourbillonnaires :

On parle aussi d'écoulement potentiel car si $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors il existe une fonction ϕ, appelée potentiel, telle que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{grad}\,\Phi$ (du fait de la relation $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad}\,\overrightarrow{D} = \overrightarrow{0}\ \forall\,\overrightarrow{D}$).

Si de plus l'écoulement est incompressible, alors la relation $div\,\overrightarrow{v} = 0$ implique $div\,(\overrightarrow{grad})\,\overrightarrow{\Phi} = 0$. On obtient alors l'équation de Laplace :

$$\boxed{\Delta\,\Phi = 0}$$

— Écoulement tourbillonnaire —

Un écoulement tourbillonnaire est caractérisé par le vecteur tourbillon non nul $\vec{\Omega}$ tel que :

9.9 Caractère divergent ou rotationnel d'un écoulement

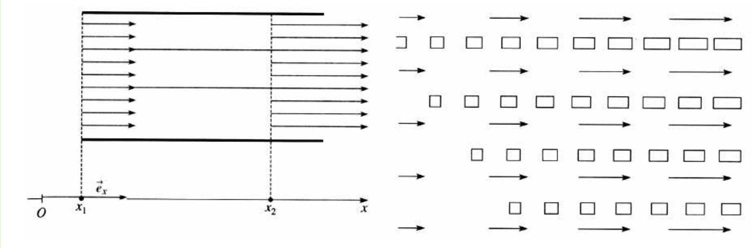
9.9.1 Caractère divergent

Imaginez que vous êtes devant une boulangerie en train de faire la queue, vous voyez des gens entrer les uns après les autres et d'autres sortir avec leur baguette ...
Vous vous demandez par exemple combien de personnes sont à l'intérieur de la boulangerie et si le nombre de ces personnes varie au cours du temps.
La réponse à cette question est simple : il suffit de compter le nombre de personnes qui entrent pendant une durée Δt (par exemple 5 min) et le nombre de personnes qui sortent au cours de la même durée : $\Delta p = +1$.
Si vous comptez 5 personnes qui entrent mais seulement 4 personnes qui sortent pendant la même durée, vous en déduirez que le nombre de personnes à l'intérieur de la boulangerie à augmenté de 1 personne pendant cette durée.
Imaginons maintenant qu'il y ait 3 portes d'entrée dans la boulangerie ainsi que 3 portes de sortie.
Les gens peuvent entrer par n'importe laquelle de ces 3 portes et sortir par n'importe laquelle des 3 portes de sortie.
Appelons x les portes d'entrée/sortie situées sur la gauche de la boulangerie, y les portes d'entrée/sortie situées au milieu et z, celles de droite.
Pour faire le calcul précédent vous devrez faire votre raisonnement sur chaque couple de portes : combien de gens entrent par la porte d'entrée x et sortent par la porte de sortie x ? De même pour y et z, toujours pendant la durée Δt.
Admettons que 3 personnes entrent en x et 1 personne sorte en x. Le bilan vaut $\boxed{\Delta p_x = +2}$ pour la boulangerie : c'est la variation pour la porte x.
Vous constatez que la porte y laisse entrer 4 personnes mais en fait sortir 7 : la boulangerie a perdu 3 personnes par les portes y. $\boxed{\Delta p_y = -3}$.
Les portes z permettent à 6 personnes d'entrer et à 5 personnes de sortir. La variation vaut $\boxed{\Delta p_z = +1}$.
La variation totale de personnes à l'intérieur de la boulangerie vaut donc :
$\boxed{\Delta p = \Delta p_x + \Delta p_y + \Delta p_z = 2 - 3 + 1 = 0}$.
Le nombre de personnes à l'intérieur de la boulangerie n'a donc pas varié au cours de cette durée $\Delta t = 5\ min$ et pourtant des tas de gens sont entrés et des tas de gens sont sortis avec leurs baguettes : le nombre de personne n'a pas divergé !
Ce bilan effectué sur 5 min peut être fait sur une durée plus courte : c'est une variation, donc une dérivée.
La divergence n'est rien d'autre que la somme des 3 dérivées ! Dans les problèmes de physique (écoulement, électromagnétisme, ...), on étudie la variation de la grandeur par rapport aux 3 axes et on somme ces 3 variations pour connaitre la variation (de flux) dans le petit élément de volume dv.

Dans un écoulement divergent, le débit volumique ne se conserve pas le long de tube de courant.
Ainsi, le volume d'une particule varie, ce qui signifie que la masse volumique change également.
Mathématiquement, si $div\,\overrightarrow{v} > 0$ (respectivement < 0), les lignes de champ convergent (respectivement divergent).
La divergence caractérise comment un champ évolue dans sa propre direction car cet opérateur fait intervenir des dérivées partielles non-croisées.
Si $div\,\overrightarrow{v} \neq 0$, on dit que le champ possède une source ou un puits de champ : il est à flux non conservatif.
Si $div\,\overrightarrow{v} = 0$, le flux est dit à champ conservatif.

— Exemple —

L'écoulement suivant est divergent :



9.9.2 Caractère rotationnel

Si en un point donné, le rotationnel du champ de vitesse est non nul, c'est que localement, les particules de fluides subissent une rotation sur elles-mêmes. Attention à ne pas tout confondre avec le tourbillon.

Tout champ de vitesse tourbillonnaire n'est pas nécessairement rotationnel, qui peut être nul, alors qu'un écoulement plan et rectiligne peut, lui, être à rotationnel non nul.

En effet, faites un tourbillon dans un seau d'eau : la théorie prévoit que loin du centre, l'écoulement est irrotationnel. En fait, les particules d'eau subissent juste une translation circulaire. Une allumette ne tourne pas sur elle-même : elle suit le mouvement de translation circulaire.

En revanche, près du centre, l'écoulement devient rotationnel, les particules tournent sur elles-mêmes et l'allumette précédente tourne sur elle-même.

Prenons un fluide visqueux (de l'huile par exemple) dans une bouteille et inclinons la bouteille.

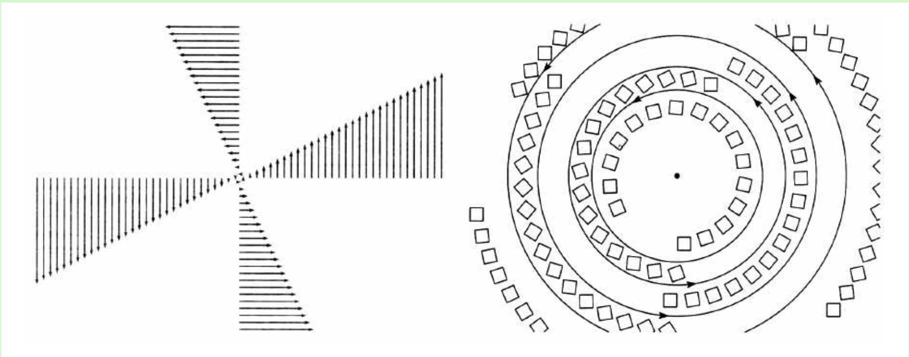
L'écoulement est plan et rectiligne. Or le rotationnel du champ de vitesse est non nul. En effet, Sur la paroi de la bouteille, il y a continuité du champ de vitesse, donc celui-ci est nul. Or en surface il est non nul ; il y a donc un gradient de vitesse selon la profondeur. Si x est la composante parallèle a la paroi et z la profondeur, la dérivée croisée est non nulle. Le rotationnel est donc non nul.

Physiquement, considérons une particule de fluide. Sur la face de hauteur $z + dz$, elle possède une vitesse différente de celle sur la face d'altitude z : elle va se mettre à tourner sur elle-même.

Dans un écoulement rotationnel, les lignes de courant se referment sur elles-mêmes (mais ce n'est pas une condition suffisante).
Mathématiquement, si $\overrightarrow{rot}\,\vec{v} \neq \vec{0}$, les lignes de champ s'enroulent autour de $\overrightarrow{rot}\,\vec{v}$.
Si $\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$, les lignes de champ n'ont pas de courbure.

— Exemple —

Ainsi, l'écoulement suivant est rotationnel :

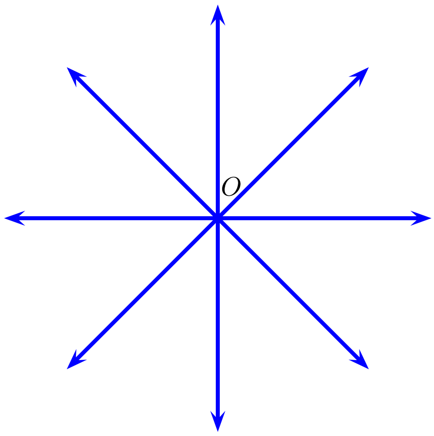


Une petite vidéo pour expliquer en pièce jointe.

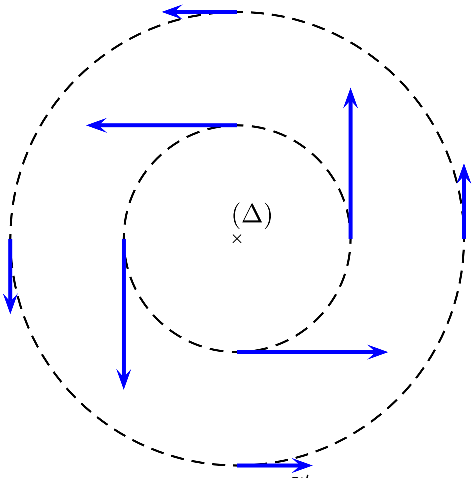
Ou bien à ici en ligne : http://www.youtube.com/watch?v=btB4qCsOlHs

9.9.3 Applications

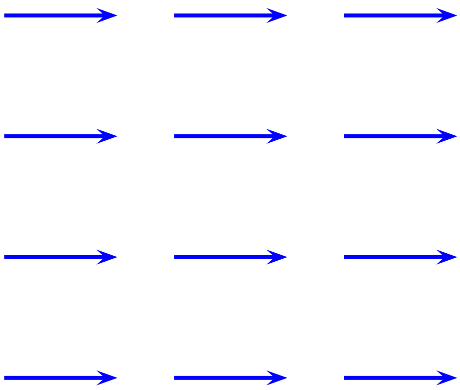
Soit les cartes de champ des vitesses suivantes :



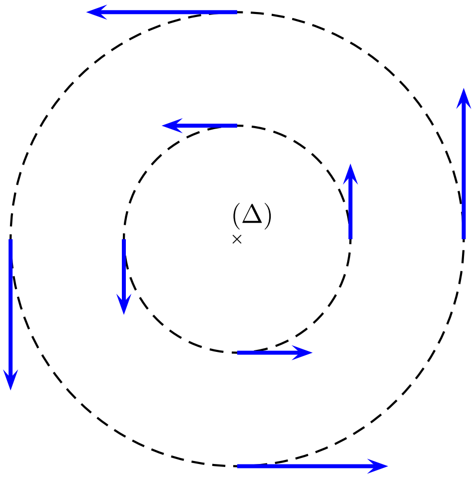
Cas a : $v = \dfrac{C^{te}}{r^2}$



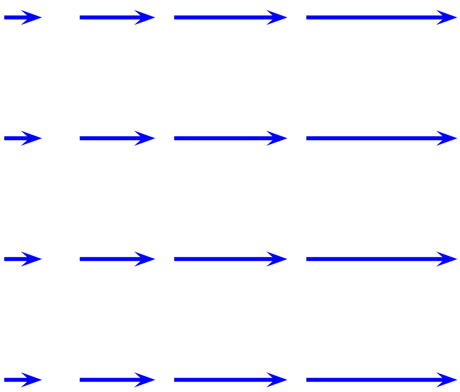
Cas b : $v = \dfrac{C^{te}}{r}$



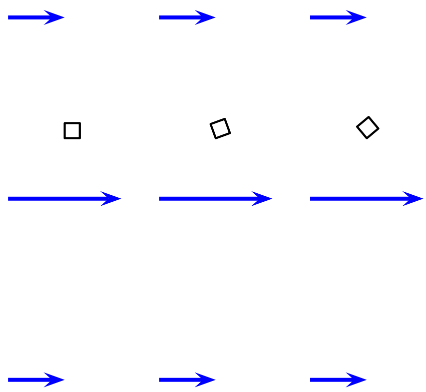
Cas c



Cas d : $v = r\,\omega$



Cas e



Cas f

TABLE 9.3 – Écoulements divergents et rotationnels

⇒ **Activité 9. 2**

Pour les exemples précédents, indiquer dans le tableau ci-dessous si les écoulements sont divergents ou non, rotationnels ou non.

Cas	$div\ \vec{v}$	$\overrightarrow{rot}\ \vec{v}$
a		
b		
c		
d		
e		
f		

9.10 En bref...

Écoulement quelconque	Écoulement stationnaire	Écoulement stationnaire incompressible
$D_m = \iint_{(S)} \rho \vec{v} \cdot \overrightarrow{d^2S}$	$D_m = C^{te}$	$D_V = C^{te}$
$D_V = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot \overrightarrow{d^2S}$	$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$	$\rho = C^{te}$
$\overrightarrow{j_m} = \rho \vec{v}$		
$div\, \overrightarrow{j_m} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$	$div\, \overrightarrow{j_m} = 0$	$div\, \vec{v} = 0$

- Pour un champ de scalaires non uniforme, le lieu des points où le champ (par exemple le potentiel électrique) garde une même valeur est une surface. Le **gradient** est perpendiculaire à ces surfaces isoparamétriques (iso... : non du champ) et il est orienté dans le sens des valeurs croissantes du champ. Un fort gradient signifie de fortes variations des valeurs du champ sur de faibles distances.
- Pour mieux comprendre la notion de **divergence**, on, peut se placer en coordonnées cartésiennes. Dans l'espace, la divergence du champ de vecteurs $\vec{v}$ non uniforme est nulle si la norme de $\vec{v}$ ne varie pas lorsqu'on se déplace sur une ligne de champ.
  Réciproquement, si la norme de $\vec{v}$ varie lorsqu'on se déplace sur une ligne de champ, alors la divergence du champ de vecteurs $\vec{v}$ est non nulle. La norme peut alors croître jusqu'à diverger, et on comprend mieux le concept de "divergence non nulle".
  Physiquement, si la divergence d'un champ de vecteurs est non nulle en un point, cela signifie qu'il existe une source de ce champ en ce point.
- Toujours en coordonnées cartésiennes, si le champ de vecteurs est uniforme, son **rotationnel** est nul. C'est aussi le cas si les composantes du vecteur ne varient pas lorsqu'on se déplace dans une direction qui lui est orthogonale.
  Si par contre les composantes du vecteur varient dans une direction qui lui est orthogonale, le rotationnel est non nul.
  Qualitativement, on peut dire qu'un champ de vecteurs à rotationnel non nul "tourne" ou "tend à faire tourner" les objets sensibles à ce champ.
- La notion de Laplacien combine les deux opérateurs précédents. Ainsi, en cordonnées cartésiennes, il suffit que le champ considéré ait une variation non linéaire par rapport à une des variables pour que son laplacien soit non nul.